

Autour de l'équation des cordes vibrantes : exemple de la guitare

Arnaud Riegert

28 février 2007

Table des matières

1	Vibration d'une corde	1
1.1	Notations	1
1.2	Principe fondamental de la dynamique	2
1.3	Équation des cordes vibrantes	2
2	Fréquence de vibration de la corde, gamme tempérée	2
2.1	Solutions stationnaires	2
2.2	Conditions aux limites	3
2.3	Hauteur du son produit	3
2.4	Gamme tempérée	3
2.5	Position des frettes sur la guitare	4
3	Harmoniques	4
3.1	Harmonique à l'octave	4
3.2	Harmonique octave + quinte	5
3.3	Harmonique double octave	5
3.4	Des harmoniques partout ?	5
3.5	Harmoniques « artificielles »	5

1 Vibration d'une corde

La construction de la guitare repose sur un principe simple : des cordes sont montées sur un support, avec une certaine tension, et reliée à une caisse de résonance qui amplifie ces vibrations, entraînant avec elle des couches d'air et créant ainsi une onde sonore.

Pour trouver quels sont les sons émis par une guitare, il est nécessaire de connaître la forme des ondes qui se propagent sur ses cordes.

1.1 Notations

On considère une corde de longueur L , dont on note λ la masse linéique. On suppose que la vibration de la corde est purement transversale et sans frottement (cette hypothèse permet de simplifier les calculs ; sa seule conséquence significative est qu'on trouvera un mouvement non-amorti), et s'effectue dans un seul plan (par soucis de simplicité des notations).

La corde occupe, dans un repère, l'intervalle $[0 ; L]$ de l'axe des x . Au point d'abscisse x correspond un déplacement dans le plan transversal $y(x, t)$ qui dépend du temps. Cela introduit un repère orthonormal naturel $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Elle est soumise à une tension T appliquée à ses extrémités. On suppose de plus que la corde est sans raideur, de sorte qu'elle transmet intégralement la tension en tout point.

1.2 Principe fondamental de la dynamique

On cherche l'équation qui régit le mouvement d'une portion élémentaire de corde, située entre les abscisses x et $x + \delta x$.

La masse de cet élément de corde est $\lambda \cdot \delta x$. Il est soumis à deux forces de tension, l'une en x et l'autre en $x + \delta x$.

En l'absence de frottements, la tension en un point est dirigée selon la tangente à la corde. On appelle $\theta(x)$ l'angle que fait la corde avec l'horizontale à l'abscisse x .

La force exercée sur l'extrémité x vaut :

$$\vec{F}_1 = T(-\cos(\theta(x))\vec{e}_x - \sin(\theta(x))\vec{e}_y) \quad (1)$$

De la même manière, en $x + \delta x$, la force exercée est :

$$\vec{F}_2 = T(\cos(\theta(x + \delta x))\vec{e}_x + \sin(\theta(x + \delta x))\vec{e}_y) \quad (2)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection sur $\vec{e}_y$:

$$\lambda \cdot \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin(\theta(x)) + T \sin(\theta(x + \delta x)) \quad (3)$$

1.3 Équation des cordes vibrantes

Dans l'approximation des petits déplacements, on a $\sin(\theta(x)) \approx \tan(\theta(x)) \approx \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$. Ainsi, l'équation se réécrit :

$$\lambda \cdot \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + T \frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

Soit encore :

$$\lambda \cdot \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \delta x \quad (5)$$

Posons alors $c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$: on obtient finalement l'équation des cordes vibrantes (équation d'onde de d'Alembert à une dimension) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

2 Fréquence de vibration de la corde, gamme tempérée

2.1 Solutions stationnaires

Les conditions aux limites (périodiques) nous incitent à chercher des solutions en ondes stationnaires, c'est-à-dire de la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$ (la corde vibre en fuseaux). Injectons une telle solution dans l'équation (6) :

$$f''g - \frac{1}{c^2} f\ddot{g} = 0 \iff c^2 \frac{f''}{f} = \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7)$$

Les variables x et t étant indépendantes, les deux rapports sont constants : notons $-\omega^2$ la valeur de ce rapport (éventuellement complexe), et posons $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. On a alors les deux équations :

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0 \quad (9)$$

Dont les solutions sont du type :

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (10)$$

$$g(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \quad (11)$$

2.2 Conditions aux limites

La corde étant fixée à ses deux extrémités, on doit avoir à tout instant : $y(0, t) = y(L, t) = 0$ ce qui impose d'une part $A = 0$ et d'autre part $\sin(kL) = 0$. Cette dernière condition nous donne une famille de solutions $(k_n)_n$ telles que $k_n L = n\pi$. On peut imposer que n soit un entier strictement positif : $n = 0$ correspond à la corde immobile, et prendre un n négatif revient à choisir le signe de B .

On a donc une famille $(f_n)_n$ de solutions telles que :

$$f_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (12)$$

A chaque solution $f_n(x)$ correspond une solution $g_n(t)$ de pulsation $\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$:

$$g_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right) \quad (13)$$

Finalement, du fait de la linéarité de l'équation d'onde, la solution générale se met sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right) \quad (14)$$

où les Y_n et les ϕ_n sont déterminés par les conditions initiales : en effet, à $t = 0$ on a :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\phi_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (15)$$

ce qui signifie que $Y_n \cos(\phi_n)$ est le n -ème coefficient de Fourier du profil de la corde à l'instant initial.

En général, la corde est tirée et lâchée sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = 0$. Dans ces conditions, on a simplement $\phi_n = 0$ ce qui simplifie l'expression. Si ce n'est pas le cas, ϕ_n dépend du profil de la vitesse initiale sur la corde. Cela peut se produire si l'on vient taper la corde, comme sur un piano par exemple.

Notons enfin que ω (et donc k) sont bien des nombres réels puisque $y(x, t)$ est réel.

2.3 Hauteur du son produit

Les différentes composantes ont des fréquences :

$$\nu_n = \frac{nc}{2L} = \frac{n}{2} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \quad (16)$$

En particulier, la fréquence du fondamental est :

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \quad (17)$$

Pour faire un son aigu, il faut donc soit :

- diminuer la longueur : c'est ce que l'on fait artificiellement lorsque l'on pose un doigt sur le manche, en ne laissant ainsi vibrer que la partie située entre le doigt et le chevalet ;
- augmenter la tension : c'est ce que l'on fait lorsqu'on accorde sa guitare et tournant les clefs ;
- diminuer la masse linéique : c'est pour cela que les cordes aiguës sont plus fines (et surtout plus légères).

2.4 Gamme tempérée

On peut sentir qu'entre une note de fréquence fondamentale f_0 et une note de fréquence fondamentale double $2f_0$, il y a une grande ressemblance sur le plan physiologique : la note de fréquence fondamentale f_0 *contient*, dans ses harmoniques, la note de fréquence double.

Historiquement, on a ensuite cherché des combinaisons harmonieuses de sons : depuis les grecs, on pense qu'il faut que les rapports de fréquences soient rationnels pour que la combinaison soit « jolie » à l'oreille. C'est cette idée qui a introduit l'intervalle de *quinte*, qui correspond à une fréquence $3f_0/2$. Successivement, de cette manière, a été construite la gamme à sept notes (do - re - mi - fa - sol - la - si — do) que l'on connaît, ce qui a justifié que l'on

appelle *octave* (pour 8) l'intervalle entre une note de fréquence f_0 et la note de fréquence double. L'intervalle du do au sol (cinquième note de la gamme) est une quinte. On a ensuite introduit la gamme dodécaphonique (12 sons) en rajoutant les notes altérées (dièses et bémols) : do - do♯/ré♭ - ré - ré♯/mi♭ - mi - fa - fa♯/sol♭ - sol - sol♯/la♭ - la - la♯/si♭ - si — do. L'intervalle entre deux notes consécutives de cette gamme s'appelle le *demi-ton*.

Cette idée a été ensuite contestée, en partie parce que les rapports qui intervenaient devenaient ridiculement non-significatifs (pourquoi une note de fréquence $\frac{3128}{2476}f_0$ sonnerait-elle harmonieusement avec celle de fréquence f_0 ?).

Pour remplacer cette théorie, on a suggéré que l'on passe à une note de la gamme dodécaphonique à la suivante en multipliant la fréquence toujours par une même quantité : c'est la seule manière qui permet de transposer en plus grave ou plus aigu un morceau entièrement sans introduire de distorsions.

En répétant 12 fois l'opération, on doit retrouver un intervalle d'un octave. Ainsi, le demi-ton doit correspondre à une multiplication de la fréquence par la racine 12-ème de 2 : $\sqrt[12]{2} = 2^{1/12} \approx 1,05946$. C'est comme ça que l'on a construit ce que l'on appelle la *gamme tempérée*.

Cette gamme est légèrement différente de la gamme construite par rapports rationnels : par exemple, l'intervalle de quinte vaut ici $2^{7/12} \approx 1,49831 \neq 3/2$.

Cette légère différence a introduit une unité d'intervalle appelée *comma (pythagoricien)*, qui est la différence entre 7 octaves et 12 quintes au sens des rapports rationnels : il vaut donc $\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$. Certains musiciens à l'oreille très affûtée utilisent encore cet intervalle, et revendiquent une différence d'un comma entre le do♯ et le ré♭, par exemple. C'est le cas notamment des violonistes qui peuvent choisir la hauteur de la note qu'ils produisent avec une précision infinie, au contraire des guitaristes pour qui les notes accessibles sont quantifiées par des barettes (frettes) placées sur le manche.

2.5 Position des frettes sur la guitare

Considérons pour fixer les idées une corde de LA ($f_0 = 110$ Hz), de longueur $L = 64$ cm. On veut construire les frettes sur le manche : il faut utiliser la formule (17) qui donne la fréquence du fondamental en fonction de la longueur. Le point important est qu'à tension et masse linéique fixées, $\nu_1 \propto 1/L$.

On peut de cette manière immédiatement placer la 12-ème frette : à cet endroit, on doit avoir un intervalle d'un octave, c'est-à-dire une fréquence double. Il faut donc se placer au milieu de la corde, à une longueur $L/2$ du sillet.

Construisons maintenant la première frette, celle du LA♯. Elle doit correspondre à une fréquence $f_0 \times \sqrt[12]{12}$. La longueur libre de la corde doit donc être $L/\sqrt[12]{2}$, et donc la distance au sillet vaut $L(1 - 2^{-1/12})$.

En itérant la démarche, on place ainsi la frette n à la distance d_n du sillet, avec :

$$d_n = L \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}^n} \right) \quad (18)$$

La guitare est prête!

3 Harmoniques

Un procédé très utilisé par les guitaristes est celui des harmoniques : il s'agit d'effleurer la corde du bout du doigt à un endroit bien précis de la corde : le son produit est alors aigu et très pur (il ressemble au son d'un diapason).

3.1 Harmonique à l'octave

Le fait d'effleurer la corde sans la presser complètement permet de la laisser vibrer sur toute sa longueur tout en imposant un noeud de vibration à l'endroit où l'on pose le doigt : ceci a pour effet de tuer une partie des harmoniques.

Prenons l'expression générale $y(x, t)$ du profil de la corde dans le temps dans le cas où la corde est lâchée sans vitesse initiale :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (19)$$

On suppose que l'on effleure la corde en son milieu, c'est-à-dire juste au-dessus de la 12ème frette. On a alors un noeud de vibration en $x = L/2$, c'est-à-dire qu'à tout instant t on doit avoir :

$$y(L/2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \equiv 0 \quad (20)$$

Ceci étant vérifié à tout instant, tous les coefficients $Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ doivent être nuls.

Ainsi, lorsque n est impair, Y_n doit être nul. En particulier, on a tué le fondamental $n = 1$, et on entend un son dont la plus petite fréquence dans le spectre est $2f_0$, avec quelques harmoniques ($4f_0, 6f_0$, etc.).

Cela revient presque à presser la corde au niveau de la 12-ème frette, à ceci près que :

- il n’y a pas besoin de garder le doigt sur la corde : une fois que la corde est excitée, elle conserve son excitation, alors que si on presse la corde puis qu’on la relâche, on double subitement la longueur de la corde !
- le son est légèrement différent à cause d’effets que l’on a pas pris en compte dans cette modélisation.

3.2 Harmonique octave + quinte

On répète la même expérience en effleurant la corde à une distance $L/3$ du sillet, c’est-à-dire à peu près au dessus de la 7-ème frette (on a $d_7 \approx 0,33256 \cdot L \approx L/3$).

On obtient de la même manière les conditions $Y_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ pour tout n . Ainsi, dès que n n’est pas un multiple de 3, Y_n doit être nul, et la plus petite fréquence du spectre que l’on obtient est $3f_0$, ce qui correspond à l’intervalle octave + quinte selon la définition historique (rapports rationnels).

Notons que la situation étant parfaitement symétrique, le résultat est exactement le même si l’on effleure la corde aux deux tiers de la longueur, c’est-à-dire à peu près au niveau de la 19-ème frette.

3.3 Harmonique double octave

On procède encore de la même manière en effleurant la corde soit au quart soit aux trois quarts de la longueur, c’est-à-dire au-dessus de la 5-ème ou de la 24-ème frette ($d_5 \approx 0,250846 \cdot L \approx L/4$; $d_{24} = 3L/4$ exactement) : on tue toutes les harmoniques ν_n pour les quelles n n’est pas un multiple de 4, de sorte que la plus petite fréquence est $4f_0$.

Par exemple, sur la corde de LA de fréquence $f_0 = 110$ Hz, on entend un son très proche de celui du diapason (440 Hz), avec seulement quelques harmoniques supplémentaires.

Cette remarque permet d’accorder sa guitare à l’oreille avec une certaine précision : entre une corde et celle qui la suit il y a généralement un intervalle de quarte (deux tons et demi), sauf entre les cordes de sol et si. Une quarte montante étant égale à une octave montante plus une quinte descendante, si l’on fait sonner l’harmonique double octave d’une corde et l’harmonique octave + quinte de la corde suivante (plus aigüe), on doit entendre la même note. Certains préfèrent cette méthode d’accordage car ils entendent beaucoup mieux la différence entre deux notes très aigües.

Mais l’intérêt principal est que l’on a accès, de manière générale, à des notes très aigües, auxquelles on n’aurait pas accès directement sur le manche (et qu’il serait difficile de produire précisément si le manche était plus long puisque l’écart entre les frettes est de plus en plus petit au fur et à mesure que l’on se déplace vers les aigus).

3.4 Des harmoniques partout ?

On pourrait se dire que le raisonnement précédent peut se généraliser à n’importe quel point de la corde. C’est faux principalement pour deux raisons :

- Pour que l’effet soit intéressant, il faut que la position x_0 choisie soit telle que $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)$ soit nul pour un grand nombre de valeurs de n , en particuliers les plus petites, ce qui limite considérablement les valeurs de x_0 possibles. Si l’on place son doigt n’importe où, il y a des fortes chances pour que les sinus ne s’annulent jamais et donc que tous les Y_n soient nuls : la corde est immédiatement étouffée, c’est bien ce que l’on observe.
- Si on effleure la corde en $x = L/p$ où p est un entier, il devient de plus en plus difficile d’exciter la corde correctement lorsque p augmente.

3.5 Harmoniques « artificielles »

Pour accéder à des fréquences très élevées autres que les multiples des fréquences des cordes « à vide », il faut déplacer le problème : pour cela, on modifie la fréquence du fondamental théorique en pressant la corde au niveau de la frette m , par exemple. Il faut alors remplacer L dans les calculs par d_m .

On peut dans ce cas (les calculs sont identiques) faire des harmoniques en grattant la corde tout en la « bloquant » au niveau de la frette $m + 12, m + 5, m + 24$, etc. Toute la difficulté consiste alors à trouver la bonne technique pour bloquer la vibration en juste un point tout en excitant la corde et en la maintenant pressée au niveau de la frette m , sachant que l’on a, sauf cas d’espèce, seulement deux mains.